Лекция 11 ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Частные производные первого порядка и их геометрическое истолкование

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y — независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется частным приращением z по x и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

то он называется *частной производной* функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0(x_0; y_0)$ обычно обозначают символами

$f'_x(x_0; y_0)$, $f'_x\Big|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x; y)$ по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x; y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

Пример 44.1. Найти частные производные функции $z = 2y + e^{x2-y} + 1$.

Решение:

$$z'_x = \left(2y + e^{x^2-y} + 1\right)'_x = (2y)'_x + \left(e^{x^2-y}\right)'_x + (1)'_x =$$
$$= 0 + e^{x^2-y} \cdot \left(x^2 - y\right)'_x + 0 = e^{x^2-y} \cdot (2x - 0) = 2x \cdot e^{x^2-y};$$
$$z'_y = 2 + e^{x^2-y} \cdot (-1)$$

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Графиком функции $z = f\,(x;\,y)$ является некоторая поверхность (см. п. 12.1). График функции $z = f\,(x;\,y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y = y_0$ Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной (см. п. 20.2), заключаем, что $f_x^{/}(x_0;\,y_0) = \operatorname{tg}\,\alpha$, где α — угол между осью Ox и касательной, проведенной к кривой $z = f\,(x;\,y_0)$ в точке $M_0\,(x_0;\,y_0;\,f\,(x_0;\,y_0))$ (см. рис.1).

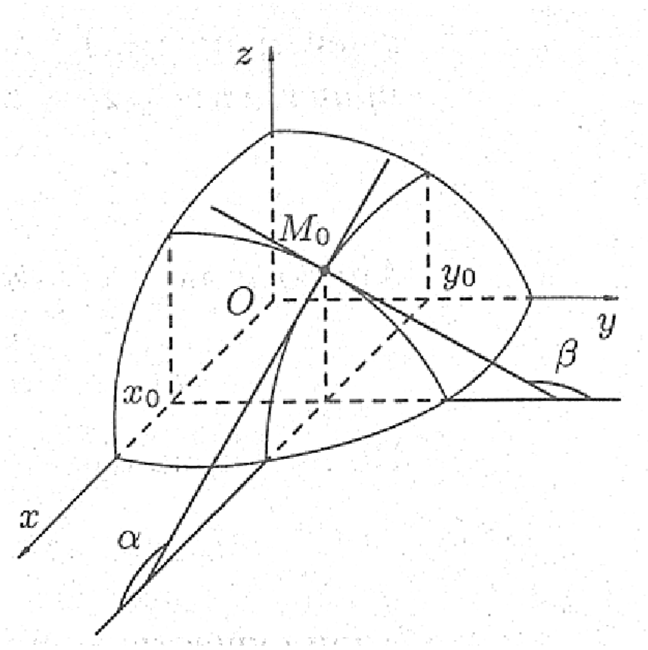

Рис.1

Аналогично, $f_x^{/}\ (x_0;\,y_0) = \operatorname{tg}\,\beta$.

§ 2. Дифференцируемость и полный дифференциал функции

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;y)$. Составим полное приращение функции в точке M:

$\Delta z = f\,(x + \Delta x;\, y + \Delta y) - f(x;y)$

Функция $z = f(x;y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x;\,y)$,

если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\,\Delta y, \qquad (44.1)$$

где $\alpha = \alpha\ (\Delta x,\ \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta\ (\Delta x,\ \Delta y) \to 0$ при $\Delta x; \to 0,\ \Delta y \to 0$. Сумма первых двух слагаемых в равенстве (44.1) представляет собой главную часть приращения функции.

Главная часть приращение функции $z = f(x;y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется полным дифференциалом этой функции и обозначается символом dz:

$$dz = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y. \qquad (44.2)$$

Выражения $A \cdot \Delta x$ и $B \cdot \Delta y$ называют частными дифференциалами. Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому равенство (44.2) можно переписать в виде

$dz = A \cdot dx + B \cdot dy$. (44.3)

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемое функции). Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Так как функция дифференцируема в точке M, то имеет место равенство (44.1). Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$. Это означает, что функция непрерывна в точке M. Положив $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$ в равенстве (44.1), получим: $\Delta_x z = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. Отсюда находим $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$. Переходя

к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, т. е. $\frac{\partial z}{\partial x} = A$. Таким образом, в точке M существует частная производная $f'_x(x;y) = A$. Аналогично доказывается, что в точке M существует частная производная $f'_x(x;y) = \frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Равенство (44.1) можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \gamma,$$

где $\gamma = \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Отметим, что обратное утверждение не верно, т. е. из непрерывности функции или существования частных производных не следует дифференцируемость функции. Так, непрерывная функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ не дифференцируема в точке (0;0).

Как следствие теоремы получаем формулу для вычисления полного дифференциала. Формула (44.3) принимает вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (44.5)$$

или

$$dz = d_x z + d_y z,$$

где $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$, $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$ — частные дифференциалы функции $z = f(x;y)$

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемое функции). Если функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x;y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой (44.5).

Примем теорему без доказательства.

Отметим, что для функции $y=f(x)$ одной переменной существование производной $f'(x)$ в точке является необходимым и достаточным условием ее дифференцируемости в этой точке.

Чтобы функция $z = f(x;y)$ была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в ней частные производные, и достаточно, чтобы она имела в точке непрерывные частные производные.

Арифметические свойства и правила исчисления дифференциалов функции одной переменной сохраняются и для дифференциалов функции двух (и большего числа) переменных.

§ 4. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Из определения дифференциала функции $z = f(x;y)$ следует, что при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz \qquad (44.6)$$

Так как полное приращение $\Delta z = f(x + \Delta x;y + \Delta y) - f(x;y)$, равенство (44.6) можно переписать в следующем виде:

$$f\left(x+\Delta x; y+\Delta y\right) \approx f\left(x; y\right) + f_x'\left(x; y\right)\Delta x + f_y'\left(x; y\right)\Delta y. \qquad (44.7)$$

Формулой (44.7) пользуются в приближенных расчетах.

Пример 44.3. Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$.

Решение: Рассмотрим функцию $z = x^y$. Тогда $1{,}02^{3{,}01} = (x + \Delta x)^{y+\Delta y}$, где $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y = 3$, $\Delta y = 0{,}01$. Воспользуемся формулой (44.7), предварительно найдя z'_x и z'_y: $z'_x = (x^y)'_x = y \cdot x^{y-1}$, $z'_y = (x^y)'_y = x^y \cdot \ln x$.

Следовательно, $1{,}02^{3{,}01} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \text{In } 1 \cdot 0{,}01$, т. е. $1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}06$.

Для сравнения: используя микрокалькулятор, находим:

$1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}061418168$.

Отметим, что с помощью полного дифференциала можно найти: границы абсолютной и относительной погрешностей в приближенных вычислениях; приближенное значение полного приращения функции и т. д.